

Getallen

Korte lessenserie voor 5 vwo, wiskunde D



Oscar Dijkhoff
Andrea Lubberdink (studentnummer: 9270930)

Inhoudsopgave

	Blz.
Deel 1 Motivatie, doel en korte beschrijving van de lessenserie	1
1.1 inleiding	1
1.2 Bespreking van de lessenserie	2
Deel 2 Lessenplan voor de vier lessen	4
Les 1 Pythagoras en getallen van de Pythagoreeërs	4
1. Verhaal	4
2. Enkele aspecten uit de theorie van getallen van de Pythagoreeërs	7
2.1 Stellingen over even en oneven getallen	7
2.2. Wat zijn getallen volgens de Pythagoreeërs?	7
3. Huiswerk	
Les 2 Bewijs van irrationaliteit en benadering van $\sqrt{2}$	9
1. Klassikale bespreking van de vraag of we met breuken alle getallen hebben	9
2. Herhaling van drie resultaten uit de vorige les	9
3. Het bewijs dat $\sqrt{2}$ niet als een breuk geschreven kan worden	9
4. De Benadering van $\sqrt{2}$ met een werkblad	10
5. Filmpje kijken	10
6. Huiswerk	10
Les 3 (Getallen)verzamelingen	11
1. Bespreking van het huiswerk en irrationale getallen	11
2. Uitleg verzamelingen	11
3. Oneindige verzamelingen, \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} en \mathbb{R}	12
4. Gelijkmachtigheid bepalen	12
5. Aftelbaar en overaftelbaar oneindig	13
6. Huiswerk	13
Les 4 Aftelbare en overaftelbare getallen	14
1. Aftelbaarheid van \mathbb{Q}	14
2. Hilbert's Grand Hotel	14
3. Cantor en de overaftelbaarheid van \mathbb{R}	15
4. Maak er 0 van!	17
5. Algebraïsche en transcendente getallen	18
6. Afsluiting	19
Noten	20
Literatuurlijst	23
Bijlagen:	
Bijlage 1 overzicht dia's	
Werkblad 1	
Werkblad 2	
Werkblad 3	

Deel 1 Motivatie, doel en korte beschrijving van de lessenserie

1.1 inleiding

Kom je door te tellen langs alle getallen? Wat zijn getallen precies? Zijn er verschillende soorten? Hoe kunnen we deze dan onderverdelen? Dit zijn vragen waar in de schoolboeken voor het vwo weinig aandacht aan wordt besteed. Ze kunnen leerlingen (die in wiskunde geïnteresseerd zijn) wel aanspreken en ze zijn belangrijk voor een goed begrip van de wiskunde.

Wij hebben een lessenserie samengesteld voor eind klas 5, wiskunde D op een Nederlands vwo. De serie bestaat uit 4 lessen en is bedoeld om de bèta-georiënteerde leerlingen (namelijk degenen die wiskunde D gekozen hebben) aan de hand van de geschiedenis inzicht te geven in getallen¹. Vroeger werden getallen gedefinieerd op een manier die ook nu nog dicht bij onze dagelijkse intuïtie ligt. Je begint met een eenheid en gaat tellen. De wiskunde laat echter zien (en liet toen ook al zien!) dat er meer getallen zijn, de irrationale².

Voor de oude Grieken was de ontdekking van het irrationale een schok. Nog steeds is het bestaan van irrationale getallen niet gemakkelijk te accepteren of te begrijpen. Met rationale getallen lijkt je immers 'overal te kunnen komen'. Er zijn er oneindig veel, zelfs op een klein interval op de getallenlijn. En tussen elke twee rationale getallen zit weer een rationaal getal.

De geschiedenis kan de leerlingen helpen inzicht te krijgen in (het bestaan van) irrationale getallen. Net als de leerlingen zelf (waarschijnlijk) wilden ook de Pythagoreeërs niet geloven dat er meer getallen zijn dan gehele getallen en verhoudingen daartussen (breuken dus, in moderne taal). Door bewijzen te geven, de bewijzen van de oude Grieken zelf, moeten we de irrationale getallen wel aannemen³. We zullen moeten concluderen dat door te tellen (ook als we breuken mee tellen) we niet alle getallen krijgen! Wat zijn getallen dan? De interesse is gewekt.

In de tweede helft van de lessenserie worden de moderne inzichten over getallen behandeld. Getallen worden geordend in verzamelingen en de aftelbaarheid en overaftelbaarheid van verschillende getalverzamelingen komt aan de orde.

Er wordt in de lessenserie gewerkt met werkbladen, er is klassikale uitleg waarbij de docent gebruikmaakt van bord en PowerPointdia's, er is ruimte voor inbreng van leerlingen waarbij korte discussie mogelijk is, een filmpje, een verhaal en een spel. De volgende paragraaf geeft een korte, nadere beschrijving van de inhoud van de vier lessen. De positieve rol van het gebruik van geschiedenis zal hierin steeds vermeld worden, waarbij verwezen wordt in noten naar [Tzanakis & Arcavi, 2000].

Deel 2 bevat het uitgewerkte lessenplan aan de hand waarvan de docent de lessen kan geven. Hierin staan ook noten met literatuurverwijzingen, extra historische informatie voor de docent en tips om naar keuze iets toe te voegen of weg te laten. Bij de verschillende lesonderdelen is een tijdindicatie aangegeven. Er wordt uitgegaan van ongeveer 45 effectieve minuten per les.

De PowerPointpresentatie die gebruikt wordt kan gedownload worden via <http://andrealubberdink.nl/Pythagoras/pythagoras.html>. Een overzicht van de dia's staat in bijlage 1, maar de inhoud van de dia's wordt in de tekst ook altijd genoemd of getoond. De werkbladen, de lijst met noten en de literatuurlijst zijn ook achterin te vinden.

De stof is boeiend en inspirerend en zet aan tot nadenken, maar is gevoelig voor hoe het gebracht wordt. Er wordt veel van de docent gevraagd en het is belangrijk dat deze zelf enthousiast is over de stof en dit goed over kan brengen aan de leerlingen. De docent zal merken dat deze lessenserie ook voor hem/haarzelf inspirerend en verhelderend is⁴.

1.2 Bespreking van de lessenserie

De eerste les bestaat uit twee delen. In het eerste deel vertelt de docent een verhaal. Het verhaal is in verteltrant geschreven (waarbij de docent natuurlijk naar eigen inzicht kan variëren) zodanig dat het leuk is voor de leerlingen om naar te luisteren – het bevat een opbouw naar een climax (de wiskunde!) – en het is leerzaam.

Het verhaal vertelt over:

- Pythagoras, een deel van zijn leer, en de manier waarop hij tot zijn leer gekomen is, namelijk vanuit een filosofische behoefte om de wereld te doorgronden⁵.
- verschillende manieren van wiskunde bedrijven: De praktische wiskunde van de Babyloniërs en de Egyptenaren tegenover de filosofisch, theoretisch gemotiveerde wiskunde van de Grieken⁶.
- de vermenging van mystiek, religie en wiskunde in de oudheid. De leerlingen zien dat de wiskunde zich niet altijd alleen vanuit logische, wetenschappelijke of praktische motieven heeft ontwikkeld⁷.

In het tweede deel worden enkele aspecten besproken van de theorie van getallen van de Pythagoreeërs. Deze theorie sluit aan bij de intuïtie over getallen. Namelijk: je kiest een eenheid en dan ga je tellen. Daarmee heb je alle getallen, want je kan de eenheid zo klein kiezen als je wilt. Het lijkt geheel juist en compleet maar het zal blijken dat het niet waar is. Er zijn meer getallen. De leerlingen leren hiervan dat het overwinnen van aanvankelijk verkeerde, intuïtieve opvattingen deel uitmaakt van de ontwikkeling van de wiskunde⁸.

De leerlingen krijgen als huiswerk mee na te denken over de vraag of alle getallen als breuk geschreven kunnen worden. Ook maken ze een werkblad⁹, waarin ze geleid worden tot een bewijs voor het bestaan van irrationale getallen aan de hand van de regelmatige stervijfhoek. De stervijfhoek is bijzonder symmetrisch en heeft inspirerende aspecten, zowel voor de leerlingen nu als voor Pythagoras.

In de tweede les wordt, nadat er eerste ruimte is voor een korte klassikale discussie of gedachtewisseling over of de huiswerkvraag, het (oude) bewijs van de irrationaliteit van $\sqrt{2}$ gegeven.

Daarna krijgen de leerlingen een tweede werkblad, waarin ze nog een ander (meetkundig) bewijs hiervan afleiden, in dezelfde lijn als het bewijs in het eerste werkblad, nu niet met een stervijfhoek, maar met een gelijkbenige, rechthoekige driehoek. Aansluitend, op hetzelfde werkblad, wordt dan een algoritme besproken, dat de Grieken al gevonden hadden, om $\sqrt{2}$ te benaderen in stappen (met recurrentieformules). Na elke stap is de benadering nauwkeuriger. De leerlingen maken dit werkblad zelfstandig (of evt. in groepjes), waarbij de docent aanwijzingen geeft en vragen beantwoordt.

Tot slot van deze les kijken de leerlingen naar het leuke, grappige, vlotte en leerzame filmpje *What was up with Pythagoras* (van YouTube). In 8 minuten wordt hierin het probleem van de irrationale getallen behandeld. Allerlei aspecten die de leerlingen in de les tegengekomen zijn, komen in sneltreinvaart voorbij.

In de derde les worden eerst klassikaal de huiswerkbladen besproken en de conclusie wordt geformuleerd: er zijn meer getallen op de getallenlijn zijn dan alleen breuken, irrationale getallen. Er wordt kort aandacht besteed aan de vraag welke getallen irrationaal zijn en hoe ze eruit zien in decimale notatie. We hebben gezien hoe de bewijzen van irrationaliteit hebben geleid tot een andere opvatting over getallen¹⁰ (zowel vroeger als nu). De interesse is gewekt in het antwoord op de vraag wat de huidige wiskundige inzichten zijn over getallen en hoe ze gedefinieerd worden en onderverdeeld in klassen.

Er volgt een korte inleiding in de verzamelingenleer waarin aan de hand van voorbeelden de begrippen element, verzameling, deelverzameling, kardinaliteit, gelijkmatigheid, aftelbaar en overaftelbaar oneindig worden geïntroduceerd. Ook worden een aantal getallenverzamelingen specifiek genoemd: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} en \mathbb{R} . De stof is een vorm gegoten die behapbaar is voor wiskunde D leerlingen in 5 vwo. Een meer rigoreuze uitleg is te vinden in [Coplakova, 2012], waarop deze les deels is gebaseerd.

Hoewel het reuze interessant zou zijn om nog veel meer te vertellen over de verzamelingenleer beperkt de stof in deze les zich tot de minimale voorkennis die nodig is om les 4 te kunnen volgen. De lessenserie gaat immers niet over verzamelingen maar over getallen.

In deze lessenserie is ervoor gekozen om de verzamelingenleer als fundament van getaltheorie niet te behandelen. Evenmin wordt een axiomatische definitie van de getallenverzamelingen behandeld. Deze stof is te abstract en past ook niet echt in (het tijdsbestek van) deze lessenserie. Niettemin is enige voorkennis over verzamelingen noodzakelijk om het in les over de overaftelbaarheid van \mathbb{R} te kunnen hebben.

In de vierde les wordt eerst teruggeblikt op de huiswerkgave. Daarbij wordt getoond dat \mathbb{Q} aftelbaar is en dus “even groot” als \mathbb{N} . Vervolgens wordt de discussie over oneindigheid in een historische context geplaatst door iets te vertellen over de worsteling onder wiskundigen over de ideeën van Cantor. Leerlingen kunnen dit relateren aan de worsteling die ze door deze lessenserie zelf doormaken met het begrip oneindig. Het historische perspectief leidt tot (een eigen interpretatie) van het verhaal over Hilbert's Grand Hotel. Het doel daarvan is om de intuïtie van de leerlingen over het begrip oneindig te versterken. Bovendien is het gewoon een leuk verhaal.

Tot slot worden de leerlingen aan de hand van een spel bekend gemaakt met de algebraïsche en transcendente getallen. Dit wordt verder niet meer in een historisch perspectief geplaatst. Het doel is slechts om de leerlingen nieuwsgierig te maken naar nog meer kennis over getallen. Om dezelfde reden worden in de afsluiting van de lessenserie nog een aantal getallenverzamelingen genoemd met voor de leerlingen waarschijnlijk curieuze namen (hyperreëel, imaginair, etc.).

De historische aspecten in deze les zijn ontleend aan [Strogatz, 2010], [Meschkowski, 1972],[Freudenthal, 1972], [Biermann, 1972] en [Grattan-Guinness, 1980].

Deel 2 Lessenplan voor de vier lessen

Les 1 Pythagoras en getallen van de Pythagoreeërs

1.(20 minuten) Verhaal.

Het onderstaande verhaal wordt verteld aan de klas. De docent kan zelf naar eigen inzicht en voorkeur variëren in woordkeuze en eventueel het verhaal verkorten of verlengen.

----- begin verhaal -----

Meer dan 2600 jaar geleden, in het jaar 600 voor Christus, leefde er op het Griekse eiland Samos een rijke koopman (genaamd Mnesarchos)¹. Hij kreeg een zoon, Pythagoras². Zijn vader gaf hem alle mogelijkheden om zich te ontwikkelen en Pythagoras was daar blij mee³. Hij groeide op als een leergierige, ijverige en intelligente jongen. Hij wilde alles te weten komen. Toen hij 18 was werd het eiland te klein voor hem. Hij wilde verder, hij wilde meer leren dan hier op het eiland mogelijk was⁴. Zijn vader had hem verteld over de beroemde Thales in Milete. Daar wilde Pythagoras naar toe.

Thales? Van de stelling van Thales? Ja, die Thales.

Thales was op dat moment een oudere, invloedrijke, geleerde⁵. Hij had leerlingen om zich heen en 'collega-geleerden'⁶. Hij was ook filosoof, natuurfilosoof. Hij stelde de vraag naar de oorsprong der dingen. Hij had een antwoord gevonden: Alles komt voort uit water. Alles is water. Dat is natuurlijk niet waar, maar voor die tijd misschien toch best knap bedacht. Water is belangrijk, belangrijker dan je op het eerste gezicht zou denken misschien. Water kan borrelen, stromen, stomen, bevriezen, druppelen, condenseren⁷

Thales was expert in de wiskunde, de meetkunde⁸.

Die had hij geleerd in Egypte en Babylonië⁹, want daar bestond al duizenden jaren wiskunde, op een best hoog niveau. Dat komt omdat daar al heel lang een hoge beschaving was. Er waren boeren, handwerkers, soldaten, ambtenaren.... Land van boeren werd afgemeten, de oogst en de producten van de handwerkers werden gesorteerd, opgestapeld, verhandeld, vervoerd... Er werd belasting geheven... Ga maar na, overal is wiskunde voor nodig. De Egyptenaren en de Babyloniërs konden al vergelijkingen oplossen en ze hadden meetkundige stellingen ontdekt. Zelfs de stelling van Pythagoras kenden ze al¹⁰. Ze hadden geen bewijzen. De stellingen klopten gewoon en dat vonden ze genoeg. Ze vroegen zich niet af waarom en hoe en waarvandaan.

Thales wel. Thales hoorde over hun stellingen, ontdekte zelf ook nieuwe, en hij ging aan de slag om ze te bewijzen. Thales wilde de wiskunde van de grond af opbouwen op een streng, logische manier (een wiskundige manier, zouden wij nu zeggen). Voor Thales was het doel van de wiskunde niet de praktische toepasbaarheid. Thales had een filosofisch doel: wiskunde kan helpen begrijpen hoe de wereld in elkaar zit. Wiskunde schept orde in de chaos van de wereld. Wiskunde heb je nodig voor het vinden van grondbeginselen¹¹.

Thales was ook goed in astronomie¹². Daarover had hij ook geleerd van de Egyptenaren en de Babyloniërs. Die hadden al duizenden jaren de hemel bestudeerd. Ze hadden gekeken naar de loop van de sterren, de planeten, de zon en de maan.

Je kan je voorstellen¹³ dat als je in die oude tijd leeft, zonder televisie en internet en straatverlichting, dat je 's avonds naar de hemel gaat kijken. Elke avond ziet het er vrijwel hetzelfde uit, maar toch is er altijd weer iets veranderd. De maan verandert het duidelijkst, maar ook de planeten 'schuiven' ten opzichte van de sterren, en de gehele sterrenhemel schuift als het ware de hemel langs in een nacht en ook dat is elke nacht net iets anders. (Je kan eraan zien wat het seizoen is en dat is belangrijk voor de landbouw. Je moet op het goede moment zaaien.)

Er zit regelmaat in de veranderingen. Je kan omlooptijden bepalen. Bijvoorbeeld kan je ontdekken dat als het volle maan is, de zon telkens ongeveer 29 ½ rondes doet voordat het weer volle maan is. De maan doet dus 2 rondjes in de tijd dat de zon 59 rondjes doet. Zo kan je allerlei verhoudingen ontdekken tussen de omlooptijden van de planeten, de zon en maan.

Maar terug naar Pythagoras. Die stapte, toen hij 18 was, op de boot naar Milete en werd een leerling van Thales. Thales was onder de indruk van hem. Pythagoras werd zijn beste leerling. Op een gegeven moment zei Thales: "Ik word oud, ik kan je niet meer leren. Ga naar Egypte. Daar heb ik ook veel geleerd."

Goed Pythagoras zou naar Egypte gaan. Hoe deed hij dat?

